Билеты к коллоквиуму, III семестр

1. Какой дифференциальный оператор второго порядка называется самосопряжённым? Каковы его свойства?
2. Какими бывают краевые условия? Выпишите подстановку краевой задачи.
3. Выведите формулу Лагранжа и выражение для определителя Вронского.
4. Какой вид имеет общее рушение для самосопряжённого уравнения второго порядка, если известно одно его рушение?
5. Выпишите формулу Грина и следствие из этой формулы.
6. Поставьте задачу для функции Грина и дкажите единственность её решения.
7. Докажите существование функции Грина.
8. Как представляется решение неоднородной краевой задачи? Докажите правильность формулы.
9. Какие дополнительные условия вводятся в постановку краевой задачи в случае, когда сучествует решение однородной краевой задачи? Докажите их необходимость.
10. Сколько решений может иметь однородная краевая задача? Обоснуйте свой вывод.
11. Дайте постановку задачи для обобщённой функции Грина. Чем она отличается от задачи для обычной функции Грина.
12. Докажите единственность обобщённой функции Грина.
13. Докажите существование обобщённой функции Грина.
14. Как представляется решение неоднородной краевой задачи, когда существует решение однородной задачи? Докажите правильность этого представления.
15. Дайте полную постановку задачи Штурма-Лиувилля. Докажите, что каждому собственному значению *λk* соответствует единственная собственная функция *yk(x)*.
16. Докажите ортогональность собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.
17. Докажите, при каких условиях собственные значения задачи Штурма-Лиувилля положительны.
18. Сведите задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению и докажите их эквивалентность.
19. Докажите, что задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечное число собственных значений.
20. При каких условиях на функцию её можно разложить в ряд по собственным функциям однородного интегрального уравнения с симметричным ядром? При выполнении этого условия постройте решение неоднородного интегрального уравнения в виде ряда.
21. Сформулируйте и докажите теорему Стеклова.
22. Получите решение неоднородной краевой задачи (*λ* = 0 не является собственным значением) в виде разложения в ряд по собственным функциям соответствующей задачи Штурма-Лиувилля.
23. Для случая, когда *p(x) = x\**ϕ*(x),* ϕ*(x) > 0*, докажите условие , где *y1(x)* — ограниченное решение задачи Штурма-Лиувилля.
24. Докажите, что при *p(x) = x\**ϕ*(x)*,если существует ограниченное решение задачи Штурма-Лиувилля, то линейно независимое с ним рушение неограниченно при .
25. Получите решение уравнения Бесселя в виде степенного ряда.
26. Докажите, что вдоль характеристик решение линейного уравнения в частных производных первого порядка принимает постоянное значение.
27. Дайте определение понятия первого интеграла линейного уравнения в частных производных и опишите метод из получения.
28. Докажите, что производная функции от первого интеграла является рушением линейного уравнения в частных производных первого порядка.
29. Дайте постановку задачи Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка и опишите метод её решения.
30. Дайте постановку обратных задач для уравнения второго порядка. Постройте интегральное уравнение для определения правой части дифференциального уравнения.
31. Докажите, что решение интегрального уравнения первого рода неустойчиво.
32. Дайте определение функционала, вариации функции и вариации функционала. Опишите постановку вариационной задачи
33. Докажите теорему о необходимом условии экстремума функционала.
34. Докажите основную лемму вариационного исчисления.
35. Выведите уравнение Эйлера для функционала .
36. Выведите уравнение Эйлера для функционала, зависящего от нескольких функций.
37. Выведите уравнение Эйлера для функционала, зависящего от производных выше первого порядка.
38. Выведите уравнение Эйлера-Остроградского для функционала от функции двух переменных.
39. Дайте постановку задачи на условный экстремум и опишите метод неопределённых множителей Лагранжа.